Лекция 1

Нужно хорошо знать Механику, чтобы создавать такие машины

<http://www.youtube.com/watch?v=4YbFr3bErhY&feature=player_embedded>

Рекомендуемая литература:

1. Электронный конспект лекций (URL объявлен)
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р*.* Курс теоретической механики. СПб: Лань, 1998.
3. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. СПб: Лань, 2006

## Кирсанов М.Н. — Электронный решебник. Теоретическая механика. Сайт: <http://reslib.com/book/Reshebnik__Teoreticheskaya_mehanika>

# СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Векторная алгебра сил**

**Предмет и модели механики.**

 Классическая или Ньютонова механика является разделом физики, в котором изучаются основные законы механического взаимодействия и движения твердых тел.

 История развития механики насчитывает тысячелетия. Практически человек стал интересоваться механикой и интуитивно использовать ее законы, когда старался точнее бросить камень на охоте. С тех пор механика прошла огромный путь. Опыт первых исследователей смогли обобщить, заложив основы классической механики, такие мыслители древности, как Архимед (3 век до нашей эры), Леонардо Да Винчи (15в), Галилей и Декарт (16в). Современный вид механика приобрела благодаря гениям Гюйгенса и Ньютона (17в), Эйлера и Лагранжа (18в).

Архимед прославился многими [механическими](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0) конструкциями. [Рычаг](http://waprik.ru/wiki/%D0%A0%D1%8B%D1%87%D0%B0%D0%B3) был известен и до Архимеда, но лишь Архимед изложил его полную теорию и успешно её применял на практике. Изобретённый им архимедов винт ([шнек](http://waprik.ru/wiki/%D0%A8%D0%BD%D0%B5%D0%BA)) для вычерпывания воды до сих пор применяется в [Египте](http://waprik.ru/wiki/%D0%95%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82).

Леонардо да Винчи интересовали проблемы [полёта](http://waprik.ru/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%91%D1%82). Список изобретений, как реальных, так и приписываемых ему: [Парашют](http://waprik.ru/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D1%88%D1%8E%D1%82) — [1483](http://waprik.ru/wiki/1483), [Велосипед](http://waprik.ru/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D0%B4), [Танк](http://waprik.ru/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%BD%D0%BA_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BE), Лёгкие переносные мосты для армии, [Прожектор](http://waprik.ru/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80), [Катапульта](http://waprik.ru/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BF%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B0), [Робот](http://waprik.ru/wiki/%D0%A0%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D1%82_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BE), Двухлинзовый телескоп.

Галиле́о Галиле́й ([1564](http://waprik.ru/wiki/1564)-1642) первым использовал [телескоп](http://waprik.ru/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BF) для наблюдения небесных тел. Галилей — основатель [экспериментальной физики](http://waprik.ru/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0). Своими экспериментами он убедительно опроверг умозрительную [метафизику](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%B0%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0) [Аристотеля](http://waprik.ru/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C) и заложил фундамент [классической механики](http://waprik.ru/wiki/%D0%9A%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0). При жизни был известен как активный сторонник [гелиоцентрической](http://waprik.ru/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BE%D1%86%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0) системы мира, что привело Галилея к [серьёзному конфликту](http://waprik.ru/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81%D1%81_%D0%93%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%BB%D0%B5%D1%8F) с [католической церковью](http://waprik.ru/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B7%D0%BC).

Рене́ Дека́рт ([1596](http://waprik.ru/wiki/1596)-[1650](http://waprik.ru/wiki/1650)) — [французский](http://waprik.ru/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) [математик](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA), [философ](http://waprik.ru/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BE%D1%84), [физик](http://waprik.ru/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA) и [физиолог](http://waprik.ru/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F), создатель [аналитической геометрии](http://waprik.ru/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) и современной [алгебраической](http://waprik.ru/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0) символики, автор метода радикального сомнения в философии, [механицизма](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B7%D0%BC) в физике.

[Сэр](http://waprik.ru/wiki/%D0%A1%D1%8D%D1%80) Исаа́к Ньюто́н ([1642](http://waprik.ru/wiki/1642) —[1727](http://waprik.ru/wiki/1727)) — [английский](http://waprik.ru/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) [физик](http://waprik.ru/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA), [математик](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA) и [астроном](http://waprik.ru/wiki/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC), один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «[Математические начала натуральной философии](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BB%D0%B0_%D0%BD%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%84%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BE%D1%84%D0%B8%D0%B8)», в котором он изложил [закон всемирного тяготения](http://waprik.ru/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD_%D0%B2%D1%81%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D1%82%D1%8F%D0%B3%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F) и [три закона механики](http://waprik.ru/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%8B_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0), ставшие основой [классической механики](http://waprik.ru/wiki/%D0%9A%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0). Разработал [дифференциальное и интегральное исчисление](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7), теорию [цвета](http://waprik.ru/wiki/%D0%A6%D0%B2%D0%B5%D1%82) и многие другие математические и физические теории. На фотографии справа –страница «Начал» с аксиомами механики.

Леона́рд Э́йлер ([1707](http://waprik.ru/wiki/1707_%D0%B3%D0%BE%D0%B4) - [1783](http://waprik.ru/wiki/1783_%D0%B3%D0%BE%D0%B4)) — швейцарский, немецкий и российский [математик](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0), внёсший значительный вклад в развитие [математики](http://waprik.ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0), [физики](http://waprik.ru/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0), [астрономии](http://waprik.ru/wiki/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D1%8F) и ряда прикладных наук. Он предложил современный подход к динамике твердого тела.

 Курс механики принято делить на три основные части: СТАТИКА, КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА. В СТАТИКЕ изучаются условия покоя тел, КИНЕМАТИКА является языком описания их движения, а в ДИНАМИКЕ, собственно и являющейся механикой, выводятся законы движения тел под действием сил. Поскольку покой есть частный случай движения, то уравнения статики было бы легче получить из законов движения тела. Однако они необходимы вам уже сейчас для изучения других механических дисциплин, поэтому мы начинаем со статики.

***Модели механики***

 Как любая точная наука механика рассматривает не реальные, бесконечно сложные физические объекты, а их модели, отражающие лишь главные в данных условиях свойства.

 Объектом классической механики является система взаимодействующих материальных точек, называемая *механической системой*.

 Частным случаем механической системы, является ***твердое тело*** - модель реального тела, представляющая собой систему материальных точек, расстояние между которыми не изменяется со временем. Деформации большинства инженерных сооружений пренебрежимо малы, поэтому модель твердого тела оправдана. Тем более что она значительно упрощает изучение движения и покоя тела и эти результаты применимы к реальному телу.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

## Сила.

## Модуль, проекция и составляющая силы.

 Все тела находятся во взаимодействии. Например, маленький шарик, висящий на нити, взаимодействует с Землей и нитью. Оба воздействия имеют точку приложения (сам шарик), линию действия (вертикаль), направление (противоположные) и величину (одинаковый модуль).

 Величины, характеризуемые линией действия, направлением и модулем в математике называются векторами. Поэтому за меру воздействия одной точки на другую принят вектор

который называют ***cилой.***

Формальные математические операции с векторами изложены в Приложении.

 При решении задач оперируют числами, а не векторами. Поэтому пользуются скалярным представлением вектора, например, тремя его проекциями на декартовы оси x,y,z. Они образуют вектор-столбец.

*F =*(1)

**Fα**

αα

хα

Рис. 1

Напомним, что проекцией вектора на ось х называется скалярная величина, равная

Знак проекции определяется знаком косинуса угла между направлениями силы и оси. Если угол острый, то проекция положительна, если тупой- то она отрицательна. Проще говоря, проекция положительна, если направление силы совпадает с точностью до π/2 с направлением оси.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

 Важно помнить, что ***проекция*** ***силы на перпендикулярную ей ось*** ***РАВНА НУЛЮ***.

 В письме вектор условимся надчеркивать , в печати выделять жирным шрифтом.

Модуль вектора будем обозначать той же буквой, но без черты в письме или нежирно в печати: F. Модуль силы измеряется в ньютонах Н (Международная система СИ) или килограммах кГ (Техническая система единиц)

 Известно, что в математике векторы складываются по правилу параллелограмма (Рис 2 b).

Потренироваться в сложении и вычитании векторов можно на сайте

<http://www.frontiernet.net/~imaging/vector_calculator.html>

**Fz**

**F**

**F1**

**F2**

**F2**

**Fn**

**F1**

**F2**

**F**

**F**

**Fz**

**Fx**

**Fy**

x

y

**Fy**

**Fx**

**F**

a)

b)

c)

d)

**k**

**i**

**j**

z

α

Рис.2

β

 Из правила паралеллограмма вытекает правило разложения вектора на составляющие вдоль двух направлений. Для этого через концы вектора проводятся линии, параллельные заданным направлениям. ***Составляющей*** вектора называется любое из слагаемых в векторной сумме

На Рис.2а составляющие вектора образуют ***векторный многоугольник***, в котором начало последующей силы совпадает с концом предыдущей. Вектор замыкает векторный многоугольник.

 Представим вектор силы **F** его проекциями на декартовы оси c ортами :

Слагаемые в этом выражении назовем ***составляющими-проекциями***  вектора **F** (Рис.3с,d).

Проекции определяют модуль вектора по теореме Пифагора:

 Таким образом, будем различать следующие обозначения

***вектор***: в печати , в письме или

***составляющая-проекция на ось x:,*** в письме или

***составляющая-проекция на плоскость xy:,*** в письме или

модуль вектора: ,

проекция вектора:

***В письменных работах обозначение вектора буквой без стрелки или черты недопустимо !***

**Система сил.**

**Главный вектор системы сил.**

 ***Системой сил*** называется множество сил, приложенных к точкам механической системы. ***Главным вектором*** системы сил называется векторная сумма всех сил системы:

**F1**

**F2**

**F3**

**Fn**

**V**

x

y

z

**F1**

**F2**

**F3**

**Fn**

Рис.3

О

Главный вектор **V** можно найти, построив в произвольном центре О векторный многоугольник (рис.3).

 Для пространственной системы сил построить многоугольник практически трудно. Проще найти главный вектор аналитически. Проектируя слагаемые формулу (6) на оси координат, определим проекции главного вектора, его модуль и направляющие косинусы:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Момент силы относительно точки.**

**Теоремы о моменте.**

 Понятие момента силы возникает при рассмотрении твердого тела. Опыт показывает, что, если зафиксировать некоторый центр О в теле, то сила **F,**  приложенная в другой точке А тела может повернуть тело вокруг О. Эту способность силы поворачивать тело и характеризует ее момент относительно О.

 Обозначим через **r** радиус-вектор точки А приложения силы относительно центра О. ***Моментом силы F относительно центра О*** называется вектор **mo(F)** (Рис.4), равный векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы

 Направление векторного произведения условно, и зависит от ориентации пространства. *Ориентация пространства*- это принятое нами правило правого или левого винта, по которому дуговой стрелке, имеющей основной смысл направления вращения, условно ставится в соответствие прямая стрелка вектора, перпендикулярная плоскости дуговой стрелки (Рис.5). Вектора, направление которых зависит от ориентированности пространства, называются  ***аксиальными.*** Обозначим их двойной стрелкой .

Левый винт

Рис.5

Правый винт

**m**o(**F**)

**F**

**r**

h

β

α

O

Рис.4

Мы будем рассматривать только право ориентированное пространство, то есть направление векторного произведения будем определять по правилу  ***правого винта:*** с конца **mo**  видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки. Получить наглядное представление о векторном произведении можно на сайте

<http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html>.

 Модуль момента равен произведению модуля силы на плечо h -длину перпендикуляра, опущенного из центра О на линию действия силы.

 Видим, что момент силы тем меньше, чем меньше ее плечо, и он обращается в ноль для любого центра на линии действия силы. Этот результат является ожидаемым, поскольку опыт показывает, что такой силой повернуть покоящееся тело вокруг опоры О невозможно.

 Роль опоры в свободном теле играет его центр тяжести. Сила не может повернуть свободное покоящееся тело, если линия действия силы проходит через центр тяжести тела.

***Теорема 1. О зависимости момента от центра.***

 Найдем связь между моментами силы **F** относительно центров А и В. Из Рис.6 видно, что

Таким образом

Формула (10) показывает, что:

 а) в общем случае момент силы зависит от центра

 б) перенос центра параллельно линии действия силы не изменяет момента (в этом случае второе слагаемое в (10) обращается в ноль..

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***Теорема 2. О проекциях моментов.***

 Проектируя (10) на ось z, проходящую через А и В, находим

z

**mA**

**mB**

A

B

**rA**

**rB**

**F**

Рис.7

поскольку произведение **АВ** х **F** перпендикулярно АВ и его проекция на z равна нулю. Таким образом, приходим к теореме:

***Проекции моментов силы относительно всех точек одной оси на эту ось равны между собой***.

 Поэтому можем сделать вывод, что m**z**(F) характеризует действие силы по отношению к оси z, и назвать ее ***моментом силы относительно оси*** (см. ниже).

**Матричное вычисление векторного произведения.**

**Присоединенная матрица.**

**Аналитическое выражение момента.**

 Известно, что в координатах x,y,z с ортами **i, j, k** векторное произведение

векторов

можно представить в виде определителя матрицы 

Или

 Векторам **а,** **b** и **c** соответствуют столбцы их проекций.

*a=* *b=* *c=*(13)

Легко проверить, что столбец *с*  можно получить*,* умножив кососимметричную матрицу *А*, состоящую из проекций вектора **а**

*А=* (14)

на столбец *b .* Матрицу *А* называют  ***присоединенной матрицей вектора а***

 Приходим к выводу, что векторной записи произведения

 соответствует матричная формула

(16)

Верно и обратное. Выражению вида (16), где *А -*  кососимметричная матрица, соответствует векторное произведение .

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***Аналитическое выражение момента***

Пусть вектора **r** и **F** заданы аналитически, т.е. своими проекциями на оси x, y, z

Векторной формуле момента соответствует матричная запись

где *R-* присоединенная матрица радиуса вектора **r** (x, y, z)

*R=*

Таким образом, получаем аналитические выражения проекций момента силы на оси

которые позволяют найти модуль и направление вектора